

Correction Devoir surveillé n°2

Exercice 1 - Dénombrement

Nous sommes en situation d'équiprobabilité. L'univers Ω contient $\binom{12}{5} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = 12 \times 11 \times 2 \times 3 = 792$ issues : en effet, on tire *simultanément* 5 cartes dans un jeu de 12 cartes.

1. On tire simultanément et au hasard 5 cartes de l'enveloppe.

(a) Soit A l'évènement « On n'obtient aucun roi ». Pour compter le nombre de tirages ne contenant aucun roi, on utilise une combinaison de 5 cartes parmi les 8 cartes qui ne sont pas des rois donc

$$\text{card}(A) = \binom{8}{5} = \frac{8 \times 7 \times 6}{6} = 56.$$

(b) Soit B l'évènement « On obtient au moins un roi ». L'évènement est complémentaire avec A . Ainsi

$$\text{Card}(B) = \text{Card}(\Omega) - \text{Card}(A) = 792 - 56 = 736.$$

(c) Soit C l'évènement « On obtient exactement deux rois ». Pour dénombrer cet évènement, il faut prendre en compte le tirage de 2 rois parmi les 4 possibles et le tirage de 3 cartes parmi les cartes restantes.

$$\text{Card}(C) = \binom{4}{2} \times \binom{8}{3}$$

Or

$$\binom{4}{2} = 6$$

et

$$\binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 56$$

Et donc

$$\text{Card}(C) = 6 \times 70 = 336.$$

(d) Soit D l'évènement « On obtient un carré ». On considère l'obtention d'un carré de roi. Il faut les 4 rois et 1 cartes prise au hasard parmi les 8 cartes restantes. Il y a donc 8 combinaisons possibles pour avoir un carré de roi. Comme 3 carrés sont possibles :

$$\text{Card}(D) = 24.$$

2. Si l'on tire successivement et sans remise 5 cartes de cet enveloppe, alors nous sommes dans une situation d'arrangements. En adaptant la réponse de la question 1(b), on a

$$\text{card}(E) = A_5^{12} - A_5^8.$$

Exercice 2 - Équations et inéquations

1. On a :

$$- u_1 = \frac{u_0}{3} + 0 - 2 = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}.$$

$$- u_2 = \frac{u_1}{3} + 1 - 2 = \frac{-5/3}{3} - 1 = -\frac{5}{9} - \frac{9}{9} = -\frac{14}{9}.$$

$$- u_3 = \frac{u_2}{3} + 2 - 2 = \frac{-14/9}{3} = -\frac{14}{27}.$$

Conclusion : $u_1 = -\frac{5}{3}$, $u_2 = -\frac{14}{9}$ et $u_3 = -\frac{14}{27}$.

2. (a) Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 4$, $u_n \geq 0$.

Soit $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \geq 0$ » pour tout $n \geq 4$.

Initialisation : pour $n = 4$, on a :

$$u_4 = \frac{u_3}{3} + 3 - 2 = \frac{-14/27}{3} + 1 = \frac{-14}{81} + \frac{81}{81} = \frac{67}{81}$$

Ainsi $u_4 \geq 0$ et donc $\mathcal{P}(4)$ est vraie.

Hérédité : on suppose que la propriété est vraie à un rang $n \geq 4$, c'est-à-dire :

$$u_n \geq 0$$

On veut montrer qu'elle est vraie au rang $n + 1$, c'est-à-dire :

$$u_{n+1} \geq 0$$

On sait que $u_{n+1} = \frac{u_n}{3} + n - 2$. Or par hypothèse de récurrence, $u_n \geq 0$ d'où $\frac{u_n}{3} \geq 0$. Or $n \geq 4$ donc $n - 2 \geq 2 \geq 0$. Par somme, on a bien $u_{n+1} \geq 0$. Ainsi $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : la propriété est vraie au rang 4 et est héréditaire. Par principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geq 4$. Ainsi, pour tout $n \geq 4$, $u_n \geq 0$.
--

(b) D'après la question précédente, pour tout $n \geq 4$ on a : $u_n \geq 0$ et ainsi :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{3} + n - 2 \geq n - 2$$

Pour tout $n \geq 4$, on a donc $u_{n+1} \geq n - 2$. Changeons l'indice : posons $N = n + 1$, on a ainsi $n = N - 1$ et si $N - 1 \geq 4$ alors $u_N \geq (N - 1) - 2$. C'est-à-dire : si $N \geq 5$, $u_N \geq N - 3$. L'indice étant muet, on obtient le résultat.

Conclusion : pour tout $n \geq 5$, $u_n \geq n - 3$.
--

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= -2u_{n+1} + 3(n+1) - \frac{21}{2} \\ &= -2\left(\frac{u_n}{3} + n - 2\right) + 3n + 3 - \frac{21}{2} \\ &= \frac{-2u_n}{3} - 2n + 4 + 3n + 3 - \frac{21}{2} \\ &= \frac{-2u_n}{3} + n + 7 - \frac{21}{2} \\ &= \frac{-2u_n}{3} + n + \frac{14}{2} - \frac{21}{2} \\ &= \frac{-2u_n}{3} + n - \frac{7}{2} \\ &= \frac{1}{3} \left(-2u_n + \frac{n}{1/3} - \frac{7/2}{1/3} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(-2u_n + 3n - \frac{21}{2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \times v_n \end{aligned}$$

Conclusion : $(v_n)_{n \geq 0}$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

(b) D'après la question précédente, on a pour tout $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} v_n &= v_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \left(-2u_0 + 3 \times 0 - \frac{21}{2}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \left(-2 - \frac{21}{2}\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= -\frac{25}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \geq 0$, $v_n = -\frac{25}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

(c) Soit $n \geq 0$. On sait que

$$v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$$

et ainsi :

$$-2u_n = v_n - 3n + \frac{21}{2}$$

d'où :

$$u_n = \frac{-1}{2}v_n + \frac{3n}{2} - \frac{21}{4}$$

D'après la question précédente, on a donc :

$$u_n = -\frac{1}{2} \left(-\frac{25}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) + \frac{3n}{2} - \frac{21}{4} = \frac{25}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3n}{2} - \frac{21}{4}$$

Conclusion : pour tout $n \geq 0$, $u_n = \frac{25}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3n}{2} - \frac{21}{4}$.

4. (a) $(v_n)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$. On a ainsi pour tout $n \geq 0$:

$$\sum_{k=0}^n v_k = v_0 \times \frac{1 - (1/3)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = -\frac{25}{2} \times \frac{1 - (1/3)^{n+1}}{2/3} = -\frac{25}{2} \times \frac{3}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) = -\frac{75}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

Conclusion : pour tout $n \geq 0$, $\sum_{k=0}^n v_k = -\frac{75}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$.

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on sait d'après une question précédente que :

$$u_k = \frac{-1}{2}v_k + \frac{3k}{2} - \frac{21}{4}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, en sommant et par linéarité, on a alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n u_k &= \frac{-1}{2} \sum_{k=0}^n v_k + \frac{3}{2} \sum_{k=0}^n k - \frac{21}{4} \sum_{k=0}^n 1 \\ &= -\frac{1}{2} \left(-\frac{75}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)\right) + \frac{3}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{21}{4}(n+1) \\ &= \frac{75}{8} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{3n(n+1) - 21(n+1)}{4} \\ &= \frac{75}{8} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{(n+1)(3n-21)}{4} \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout $n \geq 0$, $\sum_{k=0}^n u_k = \frac{75}{8} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{(n+1)(3n-21)}{4}$.

Exercice 3 - Démonstration par récurrence

1. On remplace n par les valeurs demandées :

$$R_1 = \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{1(1+1)(1+2)} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

$$R_2 = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{1(1+1)(1+2)} + \frac{1}{2(2+1)(2+2)} = \frac{1}{6} + \frac{1}{24} = \boxed{\frac{5}{24}}$$

$$\begin{aligned} R_3 &= \sum_{k=1}^3 \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{1(1+1)(1+2)} + \frac{1}{2(2+1)(2+2)} + \frac{1}{3(3+1)(3+2)} = \frac{5}{24} + \frac{1}{60} \\ &= \frac{50}{240} + \frac{4}{240} = \frac{54}{240} = \frac{27}{120} = \boxed{\frac{9}{40}} \end{aligned}$$

2. On développe l'expression de droite :

$$\begin{aligned} (n+1)(n^2 + 5n + 4) &= n^3 + 5n^2 + 4n + n^2 + 5n + 4 \\ &= \boxed{n^3 + 6n^2 + 9n + 4} \end{aligned}$$

3. Montrons cette égalité par récurrence : pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{P}(n)$ la propriété suivante :

$${}^n R_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

• **Initialisation** : Pour $n = 1$, on vient de voir que

$$R_1 = \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{1(1+1)(1+2)} = \frac{1}{6}.$$

D'un autre côté, on a $\frac{1(1+3)}{4(1+1)(1+2)} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$. On a bien l'égalité voulue, $\boxed{\mathcal{P}(1) \text{ est donc vraie.}}$

• **Hérédité** : On suppose que la propriété est vraie à un rang $n \geq 1$ fixé, c'est-à-dire :

$$R_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

On souhaite montrer que la propriété est vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire :

$$R_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}$$

On a

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
 &= \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \quad (\text{Hypothèse de récurrence}) \\
 &= \frac{n(n+3)^2 + 4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \quad (\text{Mise au même dénominateur}) \\
 &= \frac{n(n^2 + 6n + 9) + 4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n^3 + 6n^2 + 9n + 4}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \\
 &= \frac{(n+1)(n^2 + 5n + 4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)} \quad (\text{Indication de l'énoncé})
 \end{aligned}$$

On cherche les racines du trinôme $n^2 + 5n + 4$. On a $\Delta = 25 - 16 = 9$ donc les racines sont $x_1 = \frac{-5-3}{2} = -4$ et $x_2 = \frac{-5+3}{2} = -1$.

Le trinôme se factorise et peut s'écrire :

$$n^2 + 5n + 4 = (n+1)(n+4).$$

On remplace dans l'expression précédente, et on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{(n+1)(n+1)(n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}.$$

Donc $\boxed{\mathcal{P}(n+1)}$ est vraie.

• **Conclusion** : La propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire. Par récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geq 1$, c'est-à-dire :

$$\forall n \geq 1, R_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

Exercice 4 - Étude de produit

1. (a) On a :

$$P_n = (1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\dots\left(1+\frac{1}{n}\right) = \prod_{k=1}^n \left(1+\frac{1}{k}\right)$$

$$= \prod_{k=1}^n \left(\frac{k+1}{k}\right) = \frac{\prod_{k=1}^n k+1}{\prod_{k=1}^n k}$$

$$= \frac{\prod_{i=2}^{n+1} i}{\prod_{k=1}^n k} \quad (\text{Changement d'indice } i=k+1)$$

$$= \frac{n+1}{1} = \boxed{n+1} \quad (\text{Par télescopage})$$

Somme, dénombrement

M Leboucher

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on reconnaît que $Q_n = \ln(P_n)$:

$$\begin{aligned} \ln(P_n) &= \ln\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \quad (\text{car } \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)) \\ &= \boxed{Q_n} \end{aligned}$$

D'après la question précédente, on obtient pour tout entier $n \geq 1$:

$$\boxed{Q_n = \ln(1+n)}.$$

2. (a) On a :

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \times \cdots \times \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} = \prod_{k=2}^n \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{k}}\right) \\ &= \prod_{k=2}^n \left(\frac{1}{\frac{k-1}{k}}\right) = \prod_{k=2}^n \left(\frac{k}{k-1}\right) = \left(\frac{\prod_{k=2}^n k}{\prod_{k=2}^n (k-1)}\right) \\ &= \left(\frac{\prod_{k=2}^n k}{\prod_{i=1}^n i}\right) \quad (\text{Changement d'indice } i = k - 1) \\ &= \frac{n}{1} = \boxed{n} \quad (\text{Par télescopage}) \end{aligned}$$

(b) De la même façon que précédemment, on reconnaît que $S_n = \ln(R_n)$:

$$\begin{aligned} \ln(R_n) &= \ln\left(\prod_{k=2}^n \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{k}}\right)\right) = \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{k}}\right) \quad (\text{car } \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)) \\ &= \boxed{S_n} \end{aligned}$$

D'après la question précédente, on obtient que pour tout entier $n \geq 2$:

$$\boxed{S_n = \ln(n)}.$$

3. Soit n un entier supérieur à 2, alors

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^n \ln\left(\left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) \\ &= \sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) + \sum_{k=2}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \quad (\text{car } \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)) \end{aligned}$$

Or d'après les questions précédentes :

$$\sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = S_n = \ln(n)$$

et

$$\sum_{k=2}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = Q_n - Q_1 = \ln(1+n) - \ln(2). \quad (\text{Attention la somme par ici de } k = 2)$$

On obtient finalement :

$$\boxed{T_n = \ln(n+1) + \ln(n) - \ln(2)}.$$

4. En passant à l'exponentielle dans l'expression précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} \exp(T_n) &= \exp\left(\sum_{k=2}^n \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\right) \\ &= \prod_{k=2}^n \exp\left(\ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\right) \quad (\text{car } e^{a+b} = e^a \times e^b) \\ &= \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \boxed{W_n} \end{aligned}$$

D'après la question précédente, on obtient que pour tout entier $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} W_n &= \exp(\ln(n+1) + \ln(n) - \ln(2)) = e^{\ln(n+1)} \times e^{\ln(n)} \times e^{-\ln(2)} \\ &= \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}. \end{aligned}$$

Exercice 5 - Somme et coefficients binomiaux

1. Soit k, n et p trois entiers naturels avec $p \leq k \leq n$, alors

$$\begin{aligned} \binom{n}{n-p} \binom{n-p}{n-k} &= \frac{n!}{(n-p)!p!} \frac{(n-p)!}{(n-k)!(k-p)!} \\ &= \frac{n!}{p!} \frac{1}{(n-k)!(k-p)!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!p!(k-p)!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{k!}{p!(k-p)!}. \end{aligned}$$

On a bien obtenu que

$$\forall (n, k, p) \in \mathbb{N}^3, p \leq k \leq n, \quad \boxed{\binom{n}{n-p} \binom{n-p}{n-k} = \binom{n}{k} \binom{k}{p}}.$$

2. Tout d'abord,

$$\sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{p} (-1)^{p+1} 3^{k-p} = - \sum_{k=0}^n \left(\binom{n}{k} \left(\sum_{p=0}^k \binom{k}{p} (-1)^p 3^{k-p} \right) \right).$$

Or, d'après la formule du binôme,

$$\sum_{p=0}^k \binom{k}{p} (-1)^p 3^{k-p} = ((-1) + 3)^k = 2^k$$

Ainsi, d'après la formule du binôme,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \binom{n}{k} \binom{k}{p} (-1)^{p+1} 3^{k-p} &= - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k \\ &= - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} \\ &= -(2+1)^n = -3^n. \end{aligned}$$

On a donc obtenu

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^k \binom{n}{n-p} \binom{n-p}{n-k} (-1)^{p+1} 3^{k-p} = -3^n.}$$